Uma introdução à Teoria dos Modelos de espaços métricos generalizados.

Pedro H. Zambrano*
UNAL, Bogota, Colombia

Abstract

A Lógica Contínua foi introduzida nos anos 60 (Chang-Keisler [2]) e redescoberta nos anos 90 (Henson, Iovino, et al [1]) para estudar estruturas baseadas em espaços métricos completos (e.g., Espaços de Hilbert, de Banach), pois o estudo dessas estruturas desde o ponto de vista da Lógica de Primeira Ordem é mal comportada (Shelah-Stern [8]).

Porém, este ponto de vista não desenvolve o estudo de espaços topológicos em geral. Desde o ponto de vista da Lógica de Primeira Ordem, tem uma tentativa de estudo de espaços topológicos (Pillay, Kucera, et al) mas só considera espaços topológicos com algum conteúdo algébrico -e.g., Teoria dos Modelos de Módulos e Grupos Topológicos-.

Os "Quantales" são um tipo de reticulado que generaliza os "Locales" ("espaços topológicos sem pontos") que tem uma compatibilidade com uma estrutura algébrica de monoide (e.g., reticulados multiplicativos de ideais em Anéis e Análise Funcional). Flagg [3] provou que qualquer espaço topológico pode ser entendido como um espaço pseudo-métrico com uma distância valorada num Quantale adequado.

Lieberman, Rosicky e Z. [6] propuseram num contexto geral (análogo às classes não elementares AECs) uma definição de estrutura métrica generalizada baseada em distâncias valoradas em Quantales, generalizando as estruturas na Lógica Contínua.

Depois, Reyes e Z. [7] estudaram esta proposta como uma generalização da Lógica Contínua, obtendo uma caracterização da Lógica Contínua sob algumas condições adicionais para os Quantales.

Na primeira sessão deste mini curso, falaremos sobre alguns temas básicos da Lógica Contínua e dos Quantales.

Na segunda sessão, falaremos sobre a nossa proposta de Lógicas Quantale-valoradas e a nossa caracterização da Lógica Contínua neste ponto de vista, utilizando um resultado de Iovino [5] que caracteriza a Lógica Contínua como a lógica maximal no contexto métrico que satisfaz o teorema das cadeias enumeráveis de Tarski-Vaught e o teorema de compacidade. Tirando alguma destas condições adicionais para os Quantales para obter estes resultados, as quais são satisfeitas pelo intervalo unidade [0,1], obtemos novas lógicas.

References

[1] BenYaacov, I.; Berenstein, A.; Henson, C. W.; e Usvyatsov, A.. Model theory for metric structures. In: Model Theory with Applications to Algebra and Analysis. *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, 349:315?427. Cambridge University Press, 2008.

[2] Chang, C. C.; e Keisler, H. J.. *Continuous model theory.* Princenton University Press, 1966.

[3] Flagg, R.. Quantales and continuity spaces. *Algebra universalis*, 37:257?276, 1997.

[4] Flum, J.; e Ziegler. M.. *Topological Model Theory.* Springer, 1980.

[5] Iovino, J.. On the maximality of logics with approximations. *Journal Symbolic Logic*, 66 (4):1909?1918, 2001.

*phzambranor@unal.edu.co

[6] Lieberman, M.; Rosicky, J.; e Zambrano, P.. Tameness in generalized metric structures, 2018. Arxiv:1810.02317. Submetido.

[7] Reyes, D., e Zambrano, P.. Co-quantale valued logics. Arxiv:2102.06067. Preprint.

[8] Shelah, S. e Stern, J.. The Hanf number of the first order theory of Banach Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 244:147?171, 1978.